



## 2. 8. Wellenenergien

Für die Energie einer fortschreitenden regulären Sinuswelle liefert die Wellentheorie von AIRY-LAPLACE einfache Ergebnisse. Es wird dabei die Gesamtenergie  $E$  aus den Anteilen der potentiellen Energie  $E_{pot}$  und der kinetischen Energie  $E_{kin}$  nach der folgenden Gleichung berechnet

$$E = E_{pot} + E_{kin} \quad (27)$$

Für die Einheitsbreite  $b$  (z. B.  $b = 1$  m) in Richtung des Wellenkammes der zweidimensionalen Welle der Höhe  $H$  und der Länge  $L$  ergibt sich diejenige potentielle Energie, die für die Auslenkung des Wasserspiegels zum Ruhewasserspiegel erforderlich ist, durch die Integration über die Wellenlänge  $L$  zu

$$E_{pot} = \frac{1}{16} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot L \quad (28)$$



Der gleiche Wert wird erhalten, wenn über die Wellenlänge  $L$  das Integral über die Geschwindigkeitshöhen (= kinetischen Energien) gebildet wird:

$$E_{kin} = \frac{1}{16} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot L \quad (29)$$

Damit ist die Energie einer fortschreitenden Sinuswelle der Länge  $L$  und der Einheitsbreite  $b$ :

$$E = \frac{1}{8} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot L \quad (30)$$

Die Energie ergibt sich in  $\text{kN} \cdot \text{m} = \text{kW} \cdot \text{s}$ , wenn  $\gamma$  in  $\text{kN}/\text{m}^3$  und die anderen Größen in  $\text{m}$  und  $\text{s}$  eingesetzt werden.

Die vereinfachte Form  $E \sim H^2$  ist für alle Wellenarten (31)

gültig und kann deshalb als Kardinalgleichung der Wellenphysik bezeichnet werden.



Von Bedeutung ist dabei, dass bei der regulären Sinuswelle (Schwerewelle) die kinetische Energie (als Orbitalbewegung) am Ort verbleibt, während die potentielle Energie (als Wellenform) mit der Wellenfortschrittsgeschwindigkeit  $c$  der Welle folgt. Wie eingangs ausgeführt, findet bei Wasserwellen kein Massentransport statt sondern im wesentlichen ein Transport von Energie. (Theorien höherer Ordnung ergeben allerdings geringe Massentransporte dieser Art mit offenen etwa elliptischen Orbitalbahnen.) Nur in den Brandungszonen wird sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie vollständig in andere Energieformen, am Ende in Turbulenz und schließlich in Wärme, umgewandelt. Diese Umwandlungsprozesse sind z. T. sehr komplex. Es können dabei erhebliche Kräfte auftreten, die sich sowohl in langzeitigen Prozessen (z.B. Küstenveränderungen durch wellenerzeugte Sedimentbewegungen) als auch, besonders bei Sturmfluten, in schwersten Zerstörungswirkungen bemerkbar machen können.



## Energie fortschreitender und stehender Wellen

Für die Herleitung der Beziehung für die *Energie* einer *fortschreitenden* Sinuswelle kann von der Tatsache ausgegangen werden, dass eine fortschreitende Welle aus der Überlagerung zweier ähnlicher *stehender* Wellen mit gleicher Amplitude ( $A = H/2$ ) gebildet werden kann, wenn diese sich zeitlich um  $T/4$  und räumlich um  $L/4$  außer Phase befinden.

Mit der Wellenzahl  $k = 2\pi/L$   
und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$

kann ein solches Wellenpaar wie folgt angegeben werden:

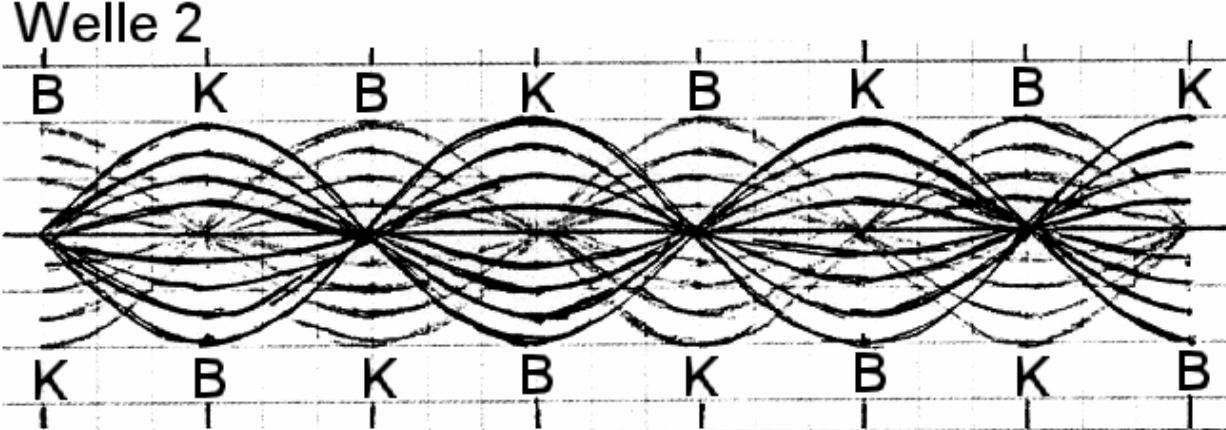
$$y_1 = A \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t$$

$$y_2 = A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t$$

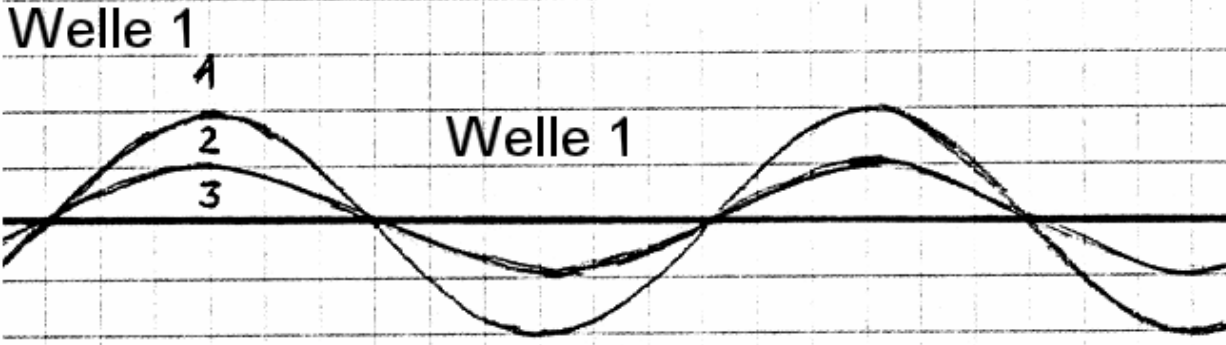
Die aus deren Superposition resultierende fortschreitende Welle gleicher Amplitude ist dann:

$$y_r = A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

vergl.01.28



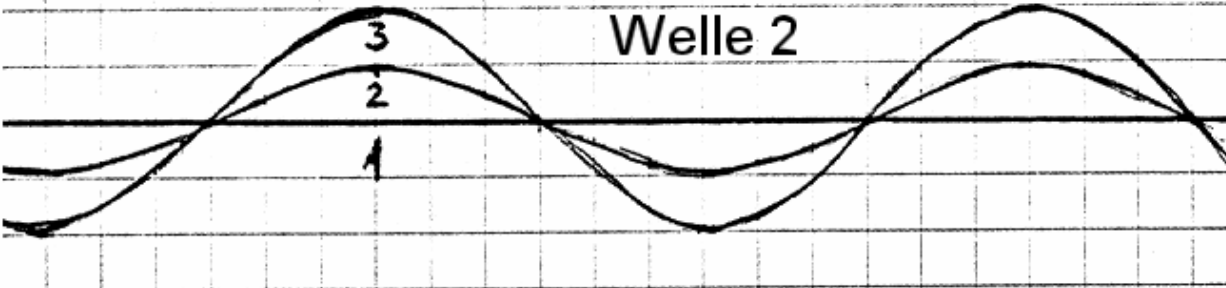
Die Überlagerung zweier stehender Sinuswellen gleicher Amplitude  $A$  ergibt eine fortschreitende Welle mit der gleichen Amplitude  $A$ .



Stehende Wellen:

$$y_1 = A \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t$$

$$y_2 = A \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t$$



Fortschreitende Welle:

$$y_r = A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

B = Schwingungsbauch  
K = Schwingungsknoten



Während Welle 1 vollständige Auslenkung vom Ruhewasserspiegel zeigt (Partikelgeschwindigkeit am Berg und im Tal gleich Null) und damit *potentielle Energie* beiträgt, ist die Auslenkung der Welle 2 vom Ruhewasserspiegel gerade gleich Null und die Partikelgeschwindigkeit maximal. D.h., Welle 2 trägt in dieser Schwingphase nur *kinetische Energie* bei.

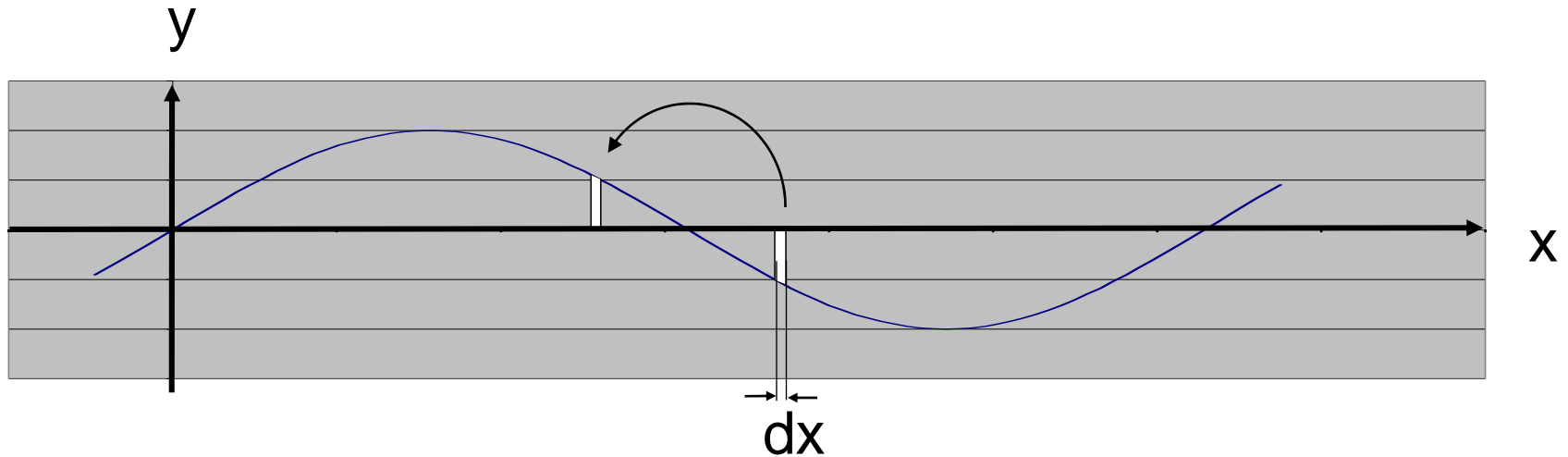
Werden die Schwingbewegungen beider Wellen aber *separat* betrachtet, stellen die genannten Energien gerade jeweils die *gesamte Energie einer* stehenden Welle in den betrachteten *ausgezeichneten* Wellenphasen dar, vergl. auch Mathematisches Pendel. Die Beträge müssen also gleich sein und die gesamte Energie der fortschreitenden Welle hat den doppelten Betrag (vergl. 04.8).

Im Vergleich zum Ruhewasserspiegel *fehlt* bei vollständiger Auslenkung Wasser am Wellental und *erscheint* dafür am Wellenberg.

Obwohl es sich um unterschiedliche Wassermassen handelt, ist es bei der Betrachtung der potentiellen Energie von Sinuswellen zulässig,




anzunehmen, dass Wasser aus dem Wellental an eine entsprechende Stelle des Wellenberges gehoben wird.



Für jedes Teilchen der Wassersäule der Breite  $dx$ , der Höhe  $y$  und der Tiefe  $b$  (senkrecht zur Tafel) ist die Hubhöhe  $y$ . Die abgegrenzte Flüssigkeitsmasse  $dm = \rho \cdot y \cdot b \cdot dx$  gewinnt durch das „Anheben“ die potentielle Energie (Energie der Lage  $mgh$ ):

$$dE_{pot} = \gamma \cdot b \cdot y^2 \cdot dx$$

Bei der Integration über die gesamte Breite des Wellenberges ist für die Wasseroberfläche das Sinus-Profil einzusetzen.


$$y = A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x$$

Die potentielle Energie für eine Wellenlänge  $L$  ist dann

$$\int_{x=0}^{x=L/2} \gamma \cdot b \cdot \left( A \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x \right)^2 dx$$

Die Integration liefert:  $E_{pot} = \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot b \cdot A^2 \cdot L$

Mit  $A = H/2$  wird

$$E_{pot} = \frac{1}{16} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot L \quad (29)$$

Bei der *fortschreitenden Welle* kommt die kinetische Energie mit dem gleichen Betrag hinzu, sodass

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{8} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot L \quad (30)$$





## Energie der Clapotis

Eine *Clapotis* ist eine *stehende Welle*, die dadurch entsteht, dass an einem Bauwerk mit vertikaler Wand Wellen total reflektiert werden. Es kommt zu einer Überlagerung der anlaufenden mit der reflektierten Welle, d.h., zweier in entgegengesetzten Richtungen fortschreitender Wellen gleicher Höhe  $H$  ( $= H_a = H_r$ ) und gleicher Periode  $T$ . Die Energiebeträge addieren sich.

Die Energie der Clapotis ist

$$E_c = E_a + E_r = 2 \cdot E = \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot b \cdot H_a^2 \cdot L \quad (32)$$

Die entstehende Clapotis ist gekennzeichnet durch eine Wellenhöhe  $H_c = 2 \cdot H_a$ .

Als *stehende Welle* hat sie die Gesamtenergie gemäß (29):

$$E_c = \frac{1}{16} \cdot \gamma \cdot b \cdot H_c^2 \cdot L = \frac{1}{16} \cdot \gamma \cdot b \cdot 4 \cdot H_a^2 \cdot L = \frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot b \cdot H_a^2 \cdot L \quad (33)$$

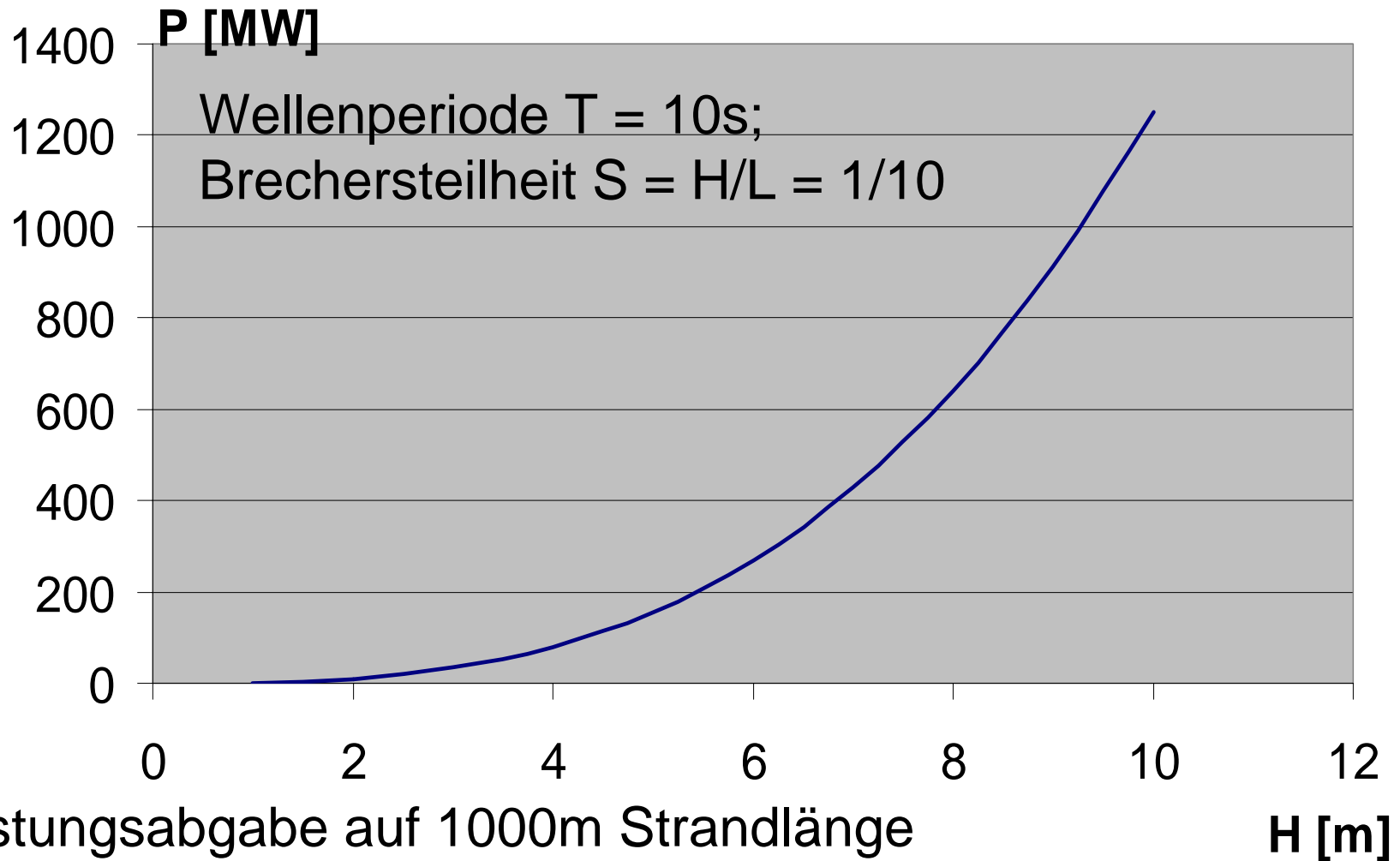


## Energie brechender Wellen:

Wenn auch die lineare Wellentheorie nach Airy-Laplace zur *Beschreibung* der Prozesse des Wellenbrechens und der Ausbrandung nicht anwendbar ist, kann doch mit der für Sinus-Wellen abgeleiteten Formel die *Größenordnung* der in der Brandung freierwender Wellenenergie bzw. der dort umgesetzten Leistung abgeschätzt werden. Hier wird die gesamte (potentielle und kinetische) Energie letztlich über Reibungsvorgänge in Wärme umgesetzt. Von Bedeutung ist dabei, dass die damit verbundenen zerstörerischen Kräfte um so größer sind, je schmaler die Brandungszone, d.h., je größer der Energieumsatz pro Flächeneinheit ist. Zur Formulierung der *Leistungsabgabe*  $P$  [kW] ist die Energie  $E$  [kW·s] auf die Wellenperiode  $T$  [s] zu beziehen:

$$E = \frac{1}{8} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot L \quad (30)$$

$$P = \frac{1}{8} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot \frac{L}{T} \quad (34)$$



$$P = \frac{1}{8} \cdot \gamma \cdot b \cdot H^2 \cdot \frac{L}{T} = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 1000 \cdot H^2 \cdot \frac{10 \cdot H}{10} = 1250 \cdot H^3 [\text{kW}]$$



## 2. 9. Wellentransformation:

Voraussetzung der nachfolgenden Betrachtung ist eine *konstante Wellenperiode  $T$* , d.h., zusätzlich vorhandene Strömungen, die einen DOPPLER-EFFEKT erzeugen, bleiben unberücksichtigt. Weiterhin wird jegliche Reibung vernachlässigt, so dass die *Wellenenergie erhalten* bleibt.

Bei abnehmender Wassertiefe (d.h., ansteigender Sohle zur Küste hin) werden vom Punkt der Grundberührung ( $d = L/2$ ) an die Wellenlängen geringer. Dies hat insbesondere die Folge, dass von einer bestimmten Wassertiefe an die Wellenhöhen anwachsen.

Eine Übersicht über die *theoretische* Transformation der Wellen wird erhalten, wenn Wellenparameter im Übergangsbereich auf ihre Größen im Tiefwasser bezogen werden, d.h. die betreffenden Relationen über der relativen Wassertiefe ( $d/L_0$ ) aufgetragen werden. Auf die komplexen Prozesse beim Wellenbrechvorgang und danach sind diese Ergebnisse aber nicht anwendbar, vergl. später (Kw07).



Die Ausgangswelle im Tiefwasser ist gegeben mit:

$$H = H_0; L = L_0; c = c_0$$

Für das Übergangsgebiet gilt dann mit

$$L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \quad \text{und} \quad L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \left[ \frac{2\pi}{L} \cdot d \right]$$

$$L = L_0 \cdot \tanh \left[ \frac{2\pi}{L} \cdot d \right]$$

Weiterhin ergibt sich unter Berücksichtigung des Energiesatzes

$$H = H_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot n} \cdot \frac{c_0}{c}} = H_0 \cdot k_S \quad \text{mit}$$

$k_S = \text{Shoaling-Faktor}$

$$n = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{\frac{4 \cdot \pi}{L} \cdot d}{\sinh \left( \frac{4 \cdot \pi}{L} \cdot d \right)} \right)$$



Bei  $d/L_0 = 0,1$  wird beispielsweise  $H = 1,4 \cdot H_0$ .

Tatsächlich sind Flachwasserzonen (Sandbänke, Riffe) daher durch erhöhten Seegang erkennbar.

Wenn Wellenmessungen nur aus dem Flachwasserbereich vorliegen, kann ggf. für  $d/L < \sim 0,1$  vereinfachend für zwei Wellen der Höhen  $H_1$  und  $H_2$  (unter Berücksichtigung von  $c = (gd)^{0,5}$ ) der sinh gleich seinem Argument gesetzt werden:

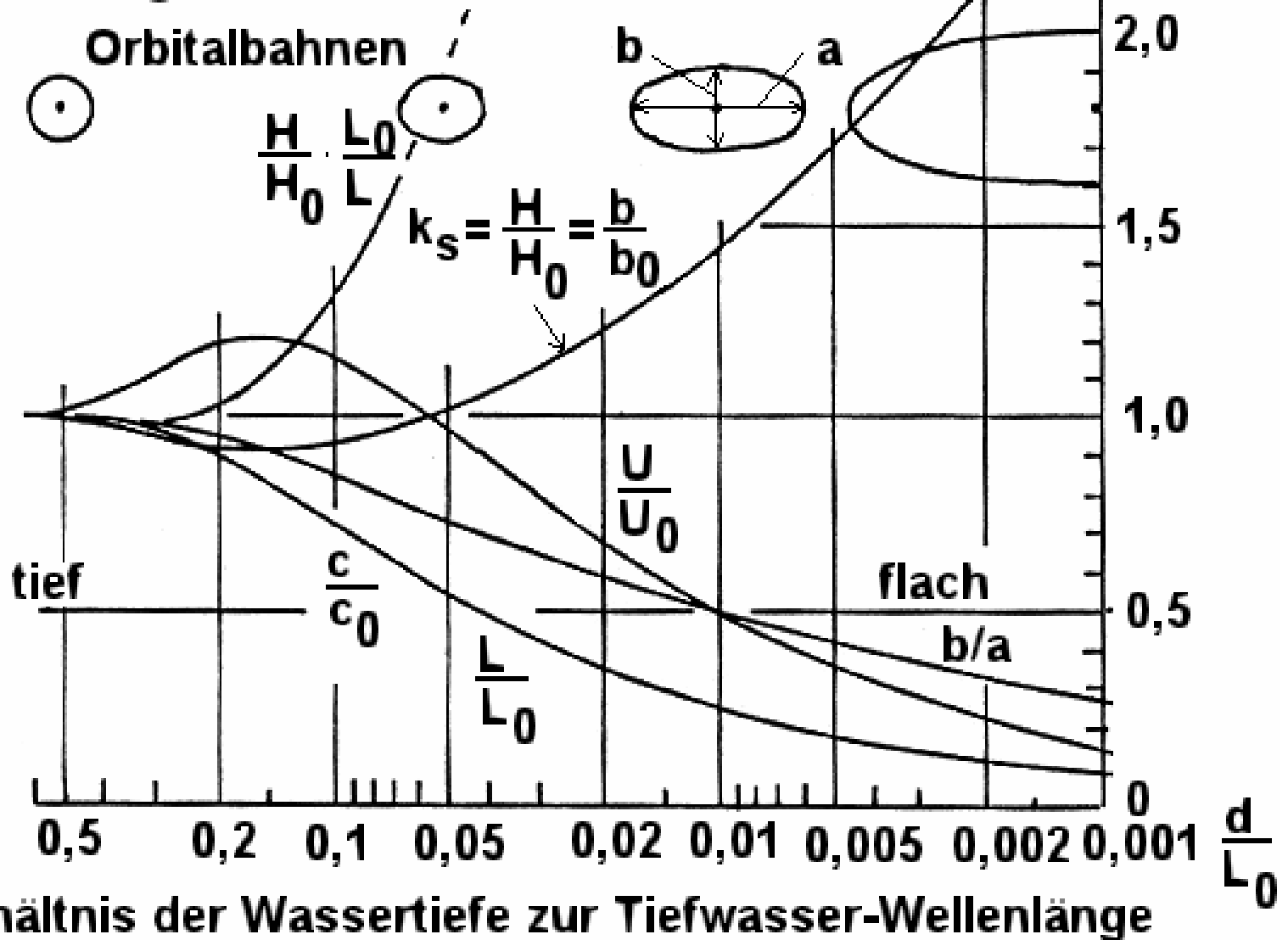
$$\sinh\left(\frac{4 \cdot \pi}{L} \cdot d\right) \approx \frac{4 \cdot \pi}{L} \cdot d \rightarrow n = 1$$

$$L_2 = \sqrt{g \cdot d_2} \cdot T$$

$$H_2 = H_1 \cdot \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = H_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{d_1}{d_2}}$$



# Änderung von Wellenparametern bei normaler Annäherung an die Küste





# 2. 10. Formelsammlung

relative Wassertiefe Wellenparameter	Flachwasser $\frac{d}{L} < \frac{1}{25}$	Übergangsbereich $\frac{1}{25} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$	Tiefwasser $\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$
1. Wellenprofil	$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[ \frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right] = \frac{H}{2} \cos \theta = \frac{H}{2} \cos [k \cdot x - \omega \cdot t]$		
2. Wellenfortschritt = Phasengeschwindigkeit	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gd}$	$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$	$C = C_0 = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} = 1,56 T$
3. Wellenlänge	$L = T \sqrt{gd} = CT$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$	$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = C_0 T = 1,56 T^2$
4. Gruppengeschwindigkeit	$C_g = C = \sqrt{gd}$	$C_g = nC = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{4\pi d/L}{\sinh(4\pi d/L)} \right] \cdot C$	$C_g = \frac{1}{2} C = \frac{gT}{4\pi}$
5. Teilchengeschwindigkeit			
horizontal	$u = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \cos \theta$	$u = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\cosh[2\pi(y+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \cos \theta$	$u = \frac{\pi H}{T} e^{\frac{2\pi y}{L}} \cos \theta$
vertikal	$v = \frac{H\pi}{T} \left(1 + \frac{y}{d}\right) \sin \theta$	$v = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh[2\pi(y+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \sin \theta$	$v = \frac{\pi H}{T} e^{\frac{2\pi y}{L}} \sin \theta$
6. Teilchenbeschleunigung			
horizontal	$a_x = \frac{H\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin \theta$	$a_x = \frac{g\pi H}{L} \frac{\cosh[2\pi(y+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \sin \theta$	$a_x = 2H \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e^{\frac{2\pi y}{L}} \sin \theta$
vertikal	$a_y = -2H \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{y}{d}\right) \cos \theta$	$a_z = -\frac{g\pi H}{L} \frac{\sinh[2\pi(y+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \cos \theta$	$a_z = -2H \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e^{\frac{2\pi y}{L}} \cos \theta$
7. Teilchenverschiebung			
horizontal	$\xi = -\frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin \theta$	$\xi = -\frac{H}{2} \frac{\cosh[2\pi(y+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)} \sin \theta$	$\xi = -\frac{H}{2} e^{\frac{2\pi y}{L}} \sin \theta$
vertikal	$\zeta = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{y}{d}\right) \cos \theta$	$\zeta = \frac{H}{2} \frac{\sinh[2\pi(y+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)} \cos \theta$	$\zeta = \frac{H}{2} e^{\frac{2\pi y}{L}} \cos \theta$
8. Unterwasserdruck	$p = \rho g (\eta - y)$	$p = \rho g \eta \frac{\cosh[2\pi(y+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} - \rho g y$	$p = \rho g \eta e^{\frac{2\pi y}{L}} - \rho g y$