



2. 4. Orbitalbahnen und Orbitalgeschwindigkeiten

Die folgenden Betrachtungen gelten weiterhin für ein Koordinatensystem, das sich mit der konstanten Fortschrittsgeschwindigkeit c mit der Welle fortbewegt. Damit können Bahn- und Stromlinien in der x - y -Ebene *wie bei stationären Strömungen* behandelt werden. Die Lösungen der Potentialgleichung liefern in der Vertikalebene für einen *sinusförmig gewellten Wasserspiegel* und *den horizontalen Boden in der Tiefe d* unter dem Ruhewasserspiegel als *allgemeine Lösung* für die Orbitalbahnen nach AIRY-LAPLACE Ellipsen (vgl. 2.2) mit der horizontalen Achse a und der vertikalen Achse b :

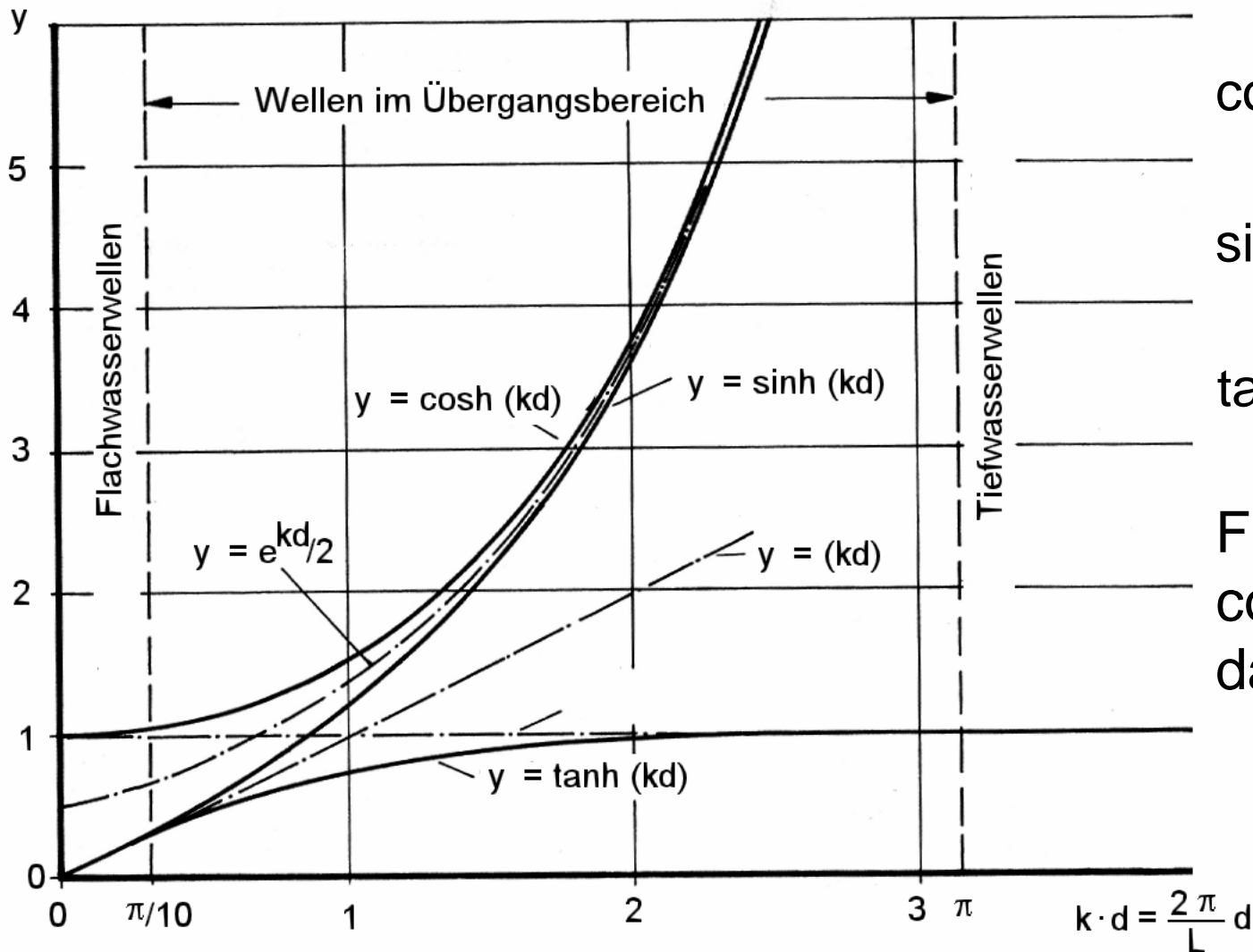
$$a = H \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (05)$$

$$b = H \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (06)$$

Die *Kreisbewegung* ist der Sonderfall der elliptischen Bewegung für $y+d > L/2$. $a = b = H$.



Die Abnahme der Orbitalbewegung mit der Wassertiefe erfolgt nach einem Exponentialgesetz (Hyperbelfunktionen: $y = f(k \cdot d)$)

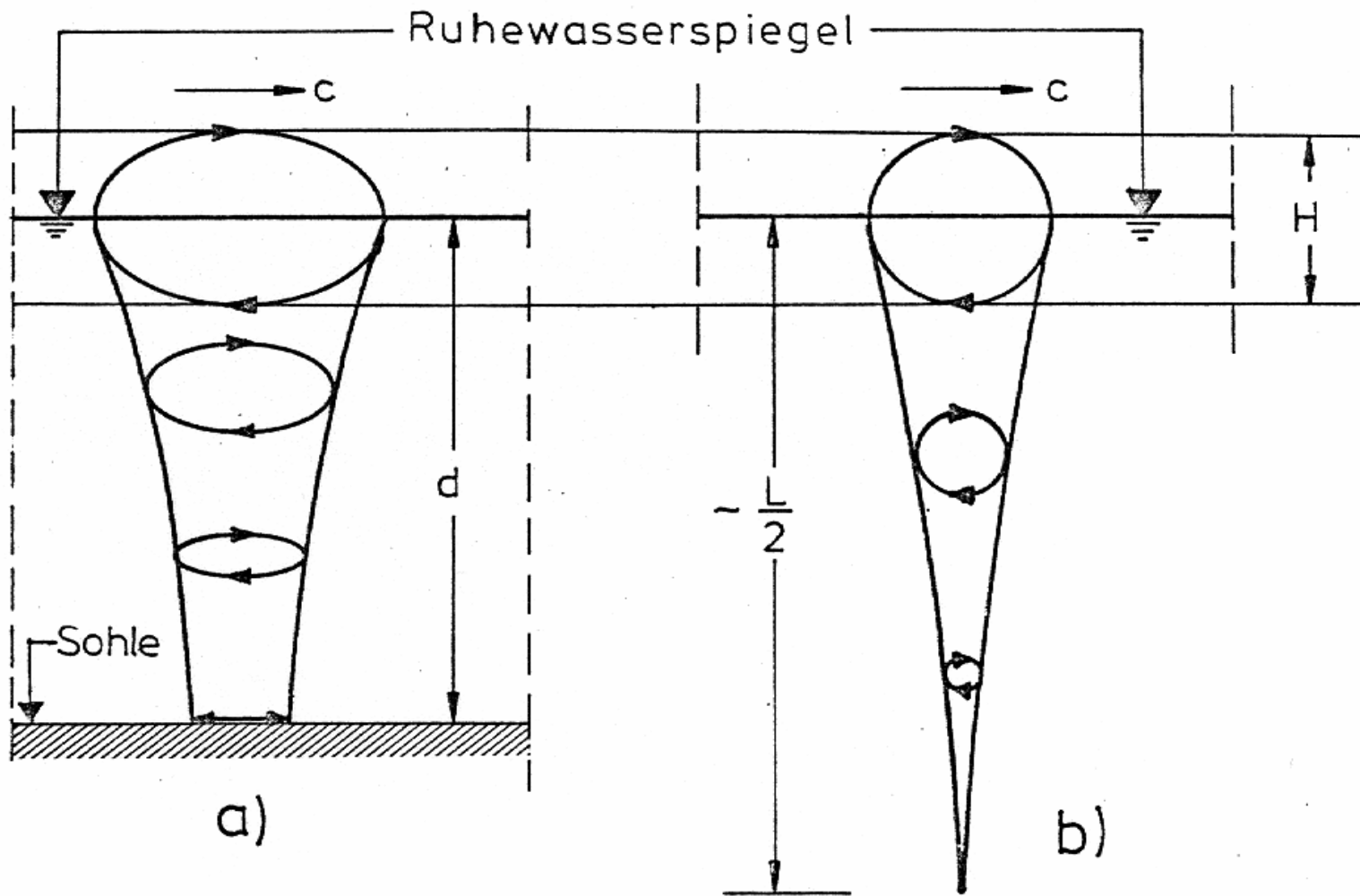


$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

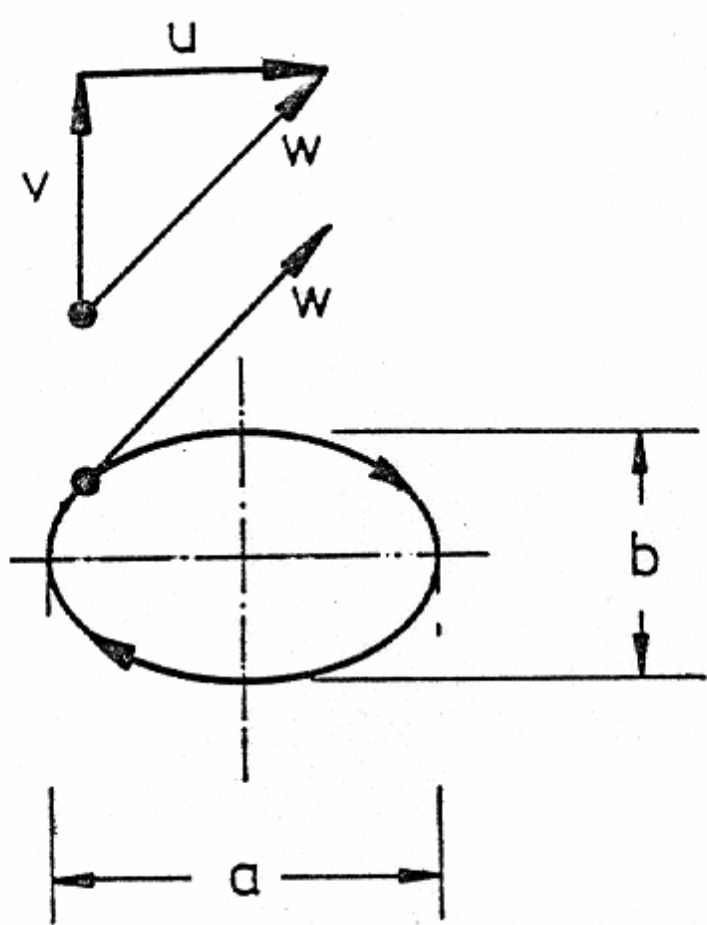
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Für $x \rightarrow \pi$ wird $\cosh \approx \sinh$ und damit $\tanh \approx 1$.



Orbitalbahnen von Wellen (schematisch)

- a) mit Grundberührung ($d < L/2$) (AIRY-LAPLACE)
- b) ohne Grundberührung ($d > L/2$, Tiefwasserwellen) (GERSTNER)



Orbitalbahn und
Orbitalgeschwindigkeit

Aus beiden o.a. Gleichungen geht hervor, dass die Längen der Hauptachsen der Orbitalbahnen monoton nach einem Exponentialgesetz mit der Tiefe y unter dem Ruhewasserspiegel abnehmen.

Für den Ruhewasserspiegel ($y = 0$) wird insbesondere die *vertikale* Achse

$$b \text{ (Oberfläche)} = H \quad (06a)$$

und für die Sohle wird mit $y = -d$

$$b \text{ (Sohle)} = 0 \quad (06b)$$

Dies folgt aus den Randbedingungen, weil eine *Flüssigkeitsbewegung senkrecht zu einer Berandung nicht möglich* ist.



Für die *horizontale* Hauptachse a gilt an der Oberfläche ($y = 0$)

$$a(y = 0) = H \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} = H \cdot \coth\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right) > H \quad (05a)$$

Vergl.2.8

An der Sohle ($y = -d$) wird wegen $\cosh(0) = 1$ die horizontale Hauptachse

$$a(y = -d) = H \cdot \frac{1}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (05b)$$

Da hier die zweite Achse b (nach Gleichung 06b) fehlt, degeneriert hier die Ellipse zu einer Strecke der Länge a , auf der die oszillierende Bewegung mit der Wellenperiode T erfolgt.

Diese Bewegung an der Sohle ist für den Küstenwasserbau von größter Bedeutung, weil vor allem durch diese *wellenerzeugten* Sohlströmungen der Sedimenttransport bewirkt wird. (Prozess Erosion - Sedimentation - Fließgleichgewicht).



Große Wassertiefe:

Da bei großen Argumenten der $\cosh \approx \sinh$ wird und damit $\operatorname{ctgh} \approx 1$ gesetzt werden kann, wird für *große Wassertiefen* d die horizontale Achse auf der Höhe des Ruhewasserspiegels ($y = 0$) zu

$$a(y = 0, \text{Tiefwasser}) = H \quad (05c)$$

Damit werden hier die elliptischen Bahnen zu *Kreisbahnen*. Dies entspricht dem Modell von GERSTNER, das als Sonderfall für große Wassertiefen in der Theorie von AIRY-LAPLACE enthalten ist. Es kann festgestellt werden, dass diese Verhältnisse vorliegen, wenn die

$$\text{Tiefwasserbedingung } d \geq L/2 \quad (07)$$

erfüllt ist.

Unterhalb einer Wassertiefe von $L/2$ unter dem Ruhewasserspiegel werden die Orbitalbewegungen wegen des \sinh im Nenner der Gleichungen (05) und (06) bedeutungslos (nach dieser Theorie!).



Demnach reichen selbst auf den Ozeanen, wo Wellenlängen größer als 500m nur selten auftreten, die Wellenwirkungen nicht tiefer als rd. 300 m.

Dies entspricht der Größenordnung der Wassertiefen auf den Schelfsockeln der Kontinente.

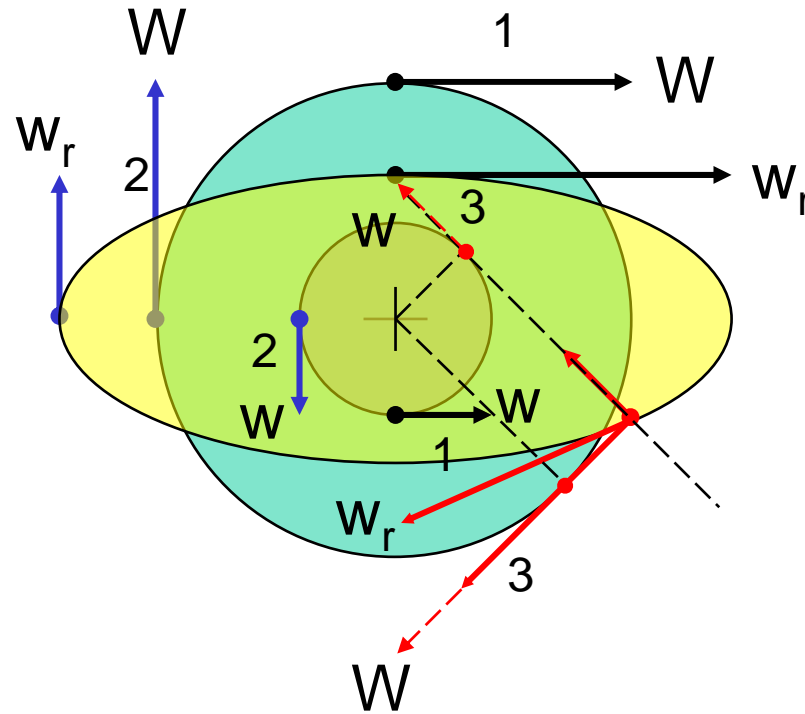
Bei Binnenseen mit kleineren Wellenlängen ist die Reichweite der Wellen unter dem Wasserspiegel entsprechend geringer.

Diese Tatsache ist von großer Bedeutung im Hinblick auf Vermischungsvorprozesse in der Ozeanographie!

Tatsächlich wurde jedoch von Tauchern gelegentlich von wellen-erzeugten Bewegungen auch in größerer Wassertiefe als $d = L/2$ berichtet.



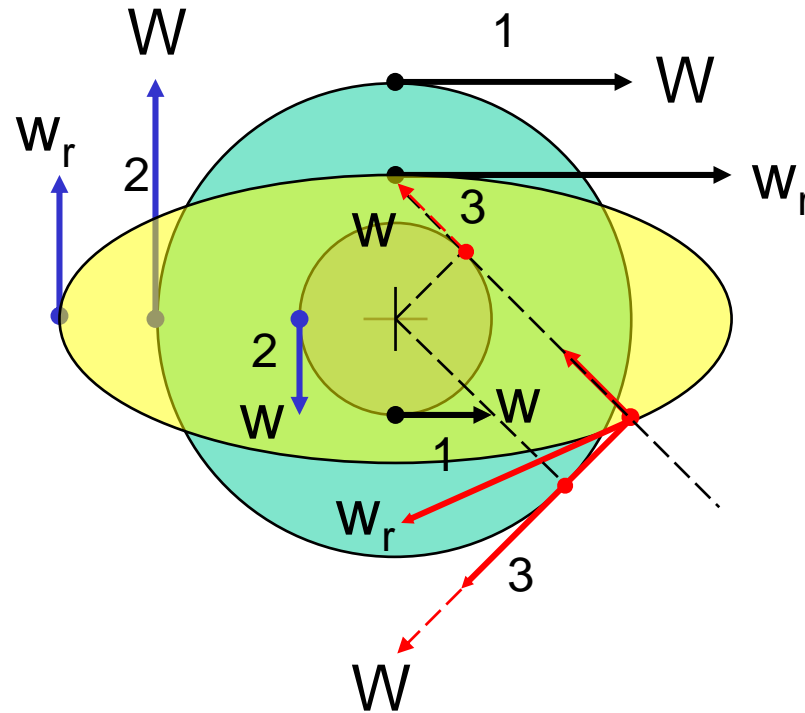
Zur Teilchenbewegung bei Grundberührung:



Die Veränderung der Orbitalbewegung bei Grundberührung kann aus derjenigen ohne Grundberührung konstruiert werden, wenn der Boden in einer Tiefe $d < L/2$ als „Spiegel“ aufgefasst wird. Am Ruhewasserspiegel kann es zu der oben dargestellten Überlagerung zweier entgegengesetzt mit unterschiedlichen Radien drehenden Kreisbewegungen kommen. Die resultierende Bewegung ist elliptisch.



Zur Teilchenbewegung bei Grundberührung:



Bei der Teilchenbewegung auf einer Ellipse ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit w_r kontinuierlich. Maximale Geschwindigkeiten sind horizontal und dem Wellenberg und dem Wellental zugeordnet. Die minimalen Geschwindigkeiten sind vertikal und den Phasen des Profildurchstoßes durch den Ruhewasserspiegel zugeordnet.



An der Sohle kommt es nach diesem Modell zu einer Überlagerung zweier entgegengesetzt drehender Orbitalbewegungen *mit gleichen* Radien.

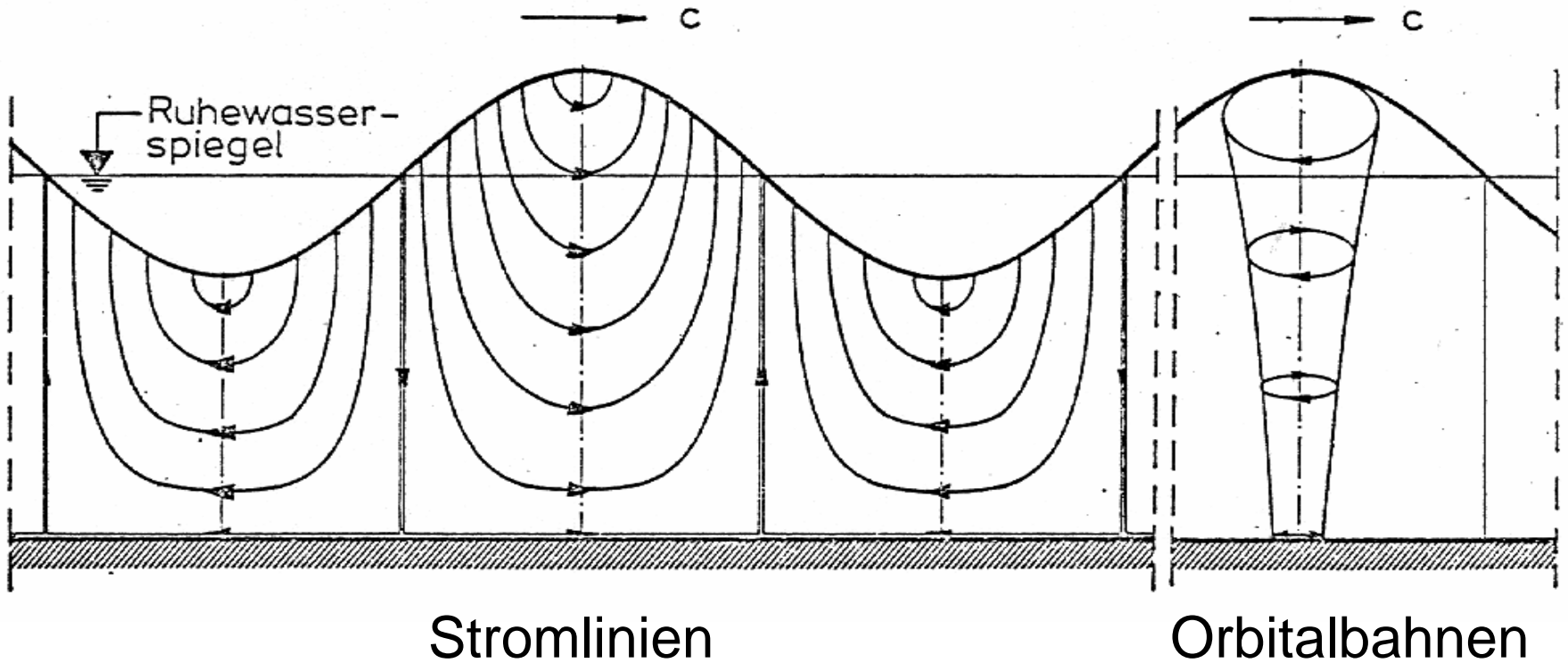
Dementsprechend verdoppeln sich *insbesondere* die horizontale Orbitalgeschwindigkeiten bezüglich der Phasen des Wellenberges und des Wellentales und die den Durchstoßpunkten der Wellenkontur durch den Ruhewasserspiegel zugeordneten Vertikalkomponenten heben einander auf.

Gleiches gilt für die dazwischen liegenden Wellenphasen.



Grundberührung:

Es wird von "Grundberührung" gesprochen, wenn die Wassertiefe $d \leq L/2$ wird (vergl. Skizze). Verbunden mit dem Feld der Orbitalbahnen ist das Feld der Stromlinien, das sich aus den augenblicklichen Geschwindigkeitsvektoren w ergibt:



Fortschreitende Welle mit Grundberührung (schematisch)



Unter den Wellenbergen sind die Strömungsgeschwindigkeiten immer in Wellenfortschrittsrichtung und unter den Tälern stets entgegen der Wellenfortschrittsrichtung gerichtet. Durch vertikale Berandungen an den Stellen, wo die Wellenlinie den Ruhewasserspiegel erreicht, werden die *Strömungszellen* unter den Wellenbergen und -tälern voneinander getrennt.

Diese Trennlinien zusammen mit der Sohle ergeben die singulären Randstromlinien der einzelnen Strömungszellen.

Wie die Länge der Orbitalbahnen nehmen auch die Orbitalgeschwindigkeiten monoton mit zunehmender Tiefe unter dem Ruhewasserspiegel *ab*.

Dies kann unmittelbar aus den mit der Wassertiefe zunehmenden *Abständen* der Stromlinien (02.11) ersehen werden.



Die Orbitalgeschwindigkeiten w können in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten u und v zerlegt werden (vgl. 02.2). Die Wellentheorie von AIRY-LAPLACE liefert folgende Lösungen:

Horizontale
Komponente

$$u = \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad (08)$$

Vertikale
Komponente

$$v = \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad (09)$$



Während einer Wellenphase treten die größten *horizontalen* Geschwindigkeiten u unter den Wellenbergen und Wellentälern auf ($x = 0, x = L/2$) (vgl. 01.29).

Wellenberg ($x = 0$):

$$u(y) = \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (10)$$

Wellental ($x = L/2$):

$$u(y) = -\frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (11)$$

Für $x = L/4$ und $x = 3L/4$ (Ruhewasserspiegel) erreichen die *Vertikalkomponenten* v ihre Größtwerte:

$$v(y) = \pm \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (12)$$



Vor Eintreffen eines Wellenberges ist die Vertikalkomponente v aufwärts (positiv) und nach dem Wellenberg abwärts (negativ) gerichtet (vgl. Abbildung Trochoidalwelle, Abschnitt 1).

An der Oberfläche, die hier mit $y = 0$ auf der Höhe des Ruhewasserspiegels liegt, wird hier

$$v(\text{Oberfläche}) = \pm \frac{H \cdot \pi}{T} \quad (12a)$$

Der Ausdruck

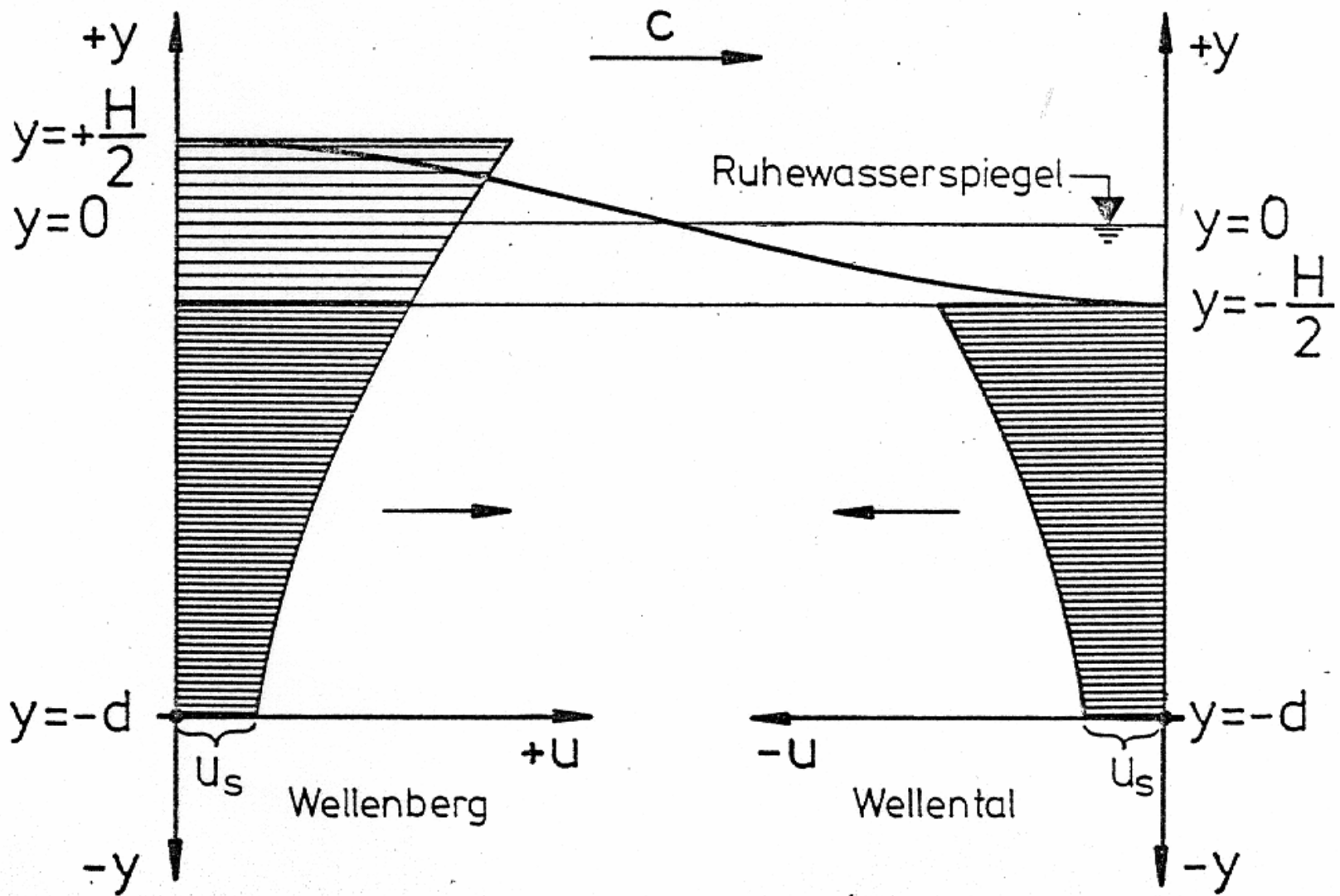
$$\frac{H \cdot \pi}{T} = w \quad (13)$$

ist allen Gleichungen für Orbitalgeschwindigkeiten gemeinsam. Er stellt diejenige Rotationsgeschwindigkeit (Umfangsgeschwindigkeit) dar, die sich für Kreisbahnen nach GERSTNER als konstante Geschwindigkeit aus der Bewegung auf der Kreisbahn der Länge $H \cdot \pi$ in der Zeit der Wellenperiode T ergibt. (vgl. auch Abschnitt 1).



Während die Vertikalkomponenten nur bezüglich der Bemessung *horizontaler* Tragelemente (Unterwasser-Pipelines oder horizontale Rohre als Fachwerkelement von Offshore-Plattformen) technische Bedeutung haben, sind die Horizontalkomponenten von größter Bedeutung für die Wellenbelastungen von Pfahlbauwerken, für die Sedimentbewegung (Feststofftransport) etc. Sie sind nachfolgend für ihre Größtwerte unter dem Wellenberg (Gleichung (10)) und dem Wellental (Gleichung (11)) einander gegenübergestellt.

Die größten Geschwindigkeiten sind in beiden Fällen an der Oberfläche vorhanden.



Abnahme der Horizontal Komponenten u der Orbitalgeschwindigkeiten mit der Wassertiefe (schematisch)



Die Maximalgeschwindigkeiten betragen mit

$y = +H/2$
am Wellenberg

$$u(y = +H/2) = \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot \left(+\frac{H}{2} + d\right)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (10a)$$

und $y = -H/2$
im Wellental

$$u(y = -H/2) = \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot \left(-\frac{H}{2} + d\right)\right)}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (11a)$$

Sie sind also am Wellenberg größer als im Wellental !

Die Darstellung der Geschwindigkeitsverteilungen für den Wellenberg und für das Wellental zeigt deutlich, dass hier die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt ist. Durch den Wellenberg tritt eine größere Wassermasse aus als durch das Wellental. Dies ist eine Folge der Vereinfachungen, die im Abschnitt 2. 2 beschrieben sind.



Es ist bemerkenswert, dass auch eine Anzahl der Wellentheorien *höherer Ordnungen* diese Inkorrektheit aufweist.

Weiterhin zeigen die Darstellungen bzw. die zugehörigen Gleichungen (10) und (11), dass bei einer Welle mit Grundberührung an der Sohle mit $y = -d$ der gleiche Absolutwert u_s für Wellenberg und Wellental besteht (vgl. 02.13).

Es ist mit $\cosh(0) = 1$:

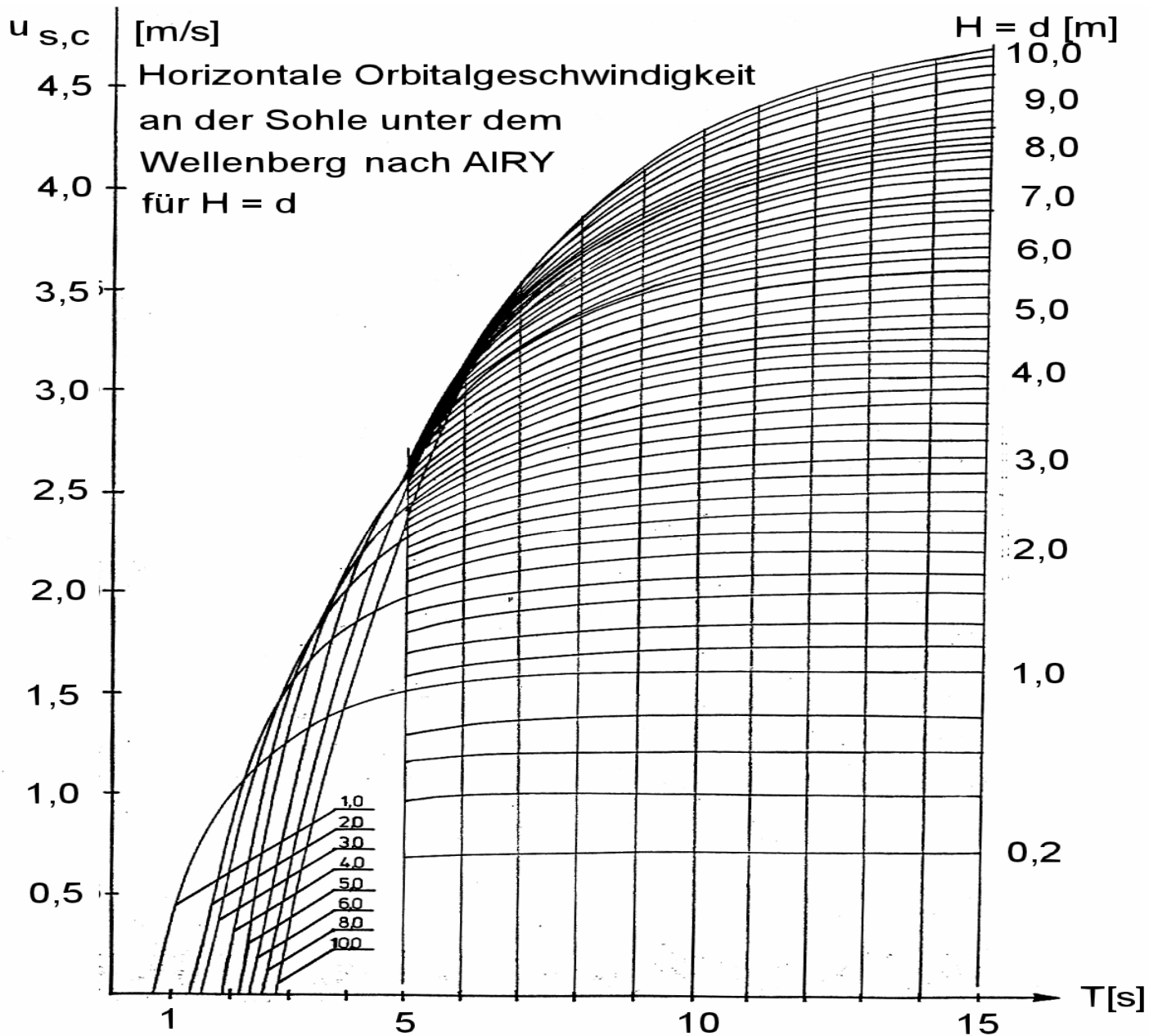
$$u_s = \pm \frac{H \cdot \pi}{T} \cdot \frac{1}{\sinh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot d\right)} \quad (14)$$

Es können daher Gleichungen (10) und (11) auch in der Form verwendet werden:

$$u(y) = \pm u_s \cdot \cosh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (y + d)\right) \quad (15)$$

Am Wellenberg: Positives Vorzeichen und $-d \leq y \leq +\frac{H}{2}$

Am Wellental: Negatives Vorzeichen und $-d \leq y \leq -\frac{H}{2}$





Auch für die Orbitalgeschwindigkeiten gilt wie für die Orbitalbahnen (vgl. Gleichung (05b)), dass sie bei Wassertiefen, die die Tiefwasserbedingung überschreiten

$$d \geq L/2 \quad (07)$$

wegen der starken Zunahme des \sinh im Nenner (Gleichung 14) vernachlässigbar klein werden.

Tiefer als $L/2$ treten praktisch keine Wellenwirkungen mehr auf (vgl. vorher). An der Oberfläche und auch darunter sind die Orbitalbahnen Kreise (nach dem Ansatz von GERSTNER), deren Radien bei y tiefer als $-L/2$ zu Null werden (vgl. 02.3).

In Fällen, in denen anstatt der Komponenten u und v in x - bzw. y -Richtung der Gesamtbetrag der Orbitalgeschwindigkeit w von Interesse ist (vgl. 02.2), kann dieser aus Gleichung (08) und (09) und aus den folgenden Gleichungen unschwer mit der Beziehung

$$w^2 = u^2 + v^2 \quad (16)$$

berechnet werden.